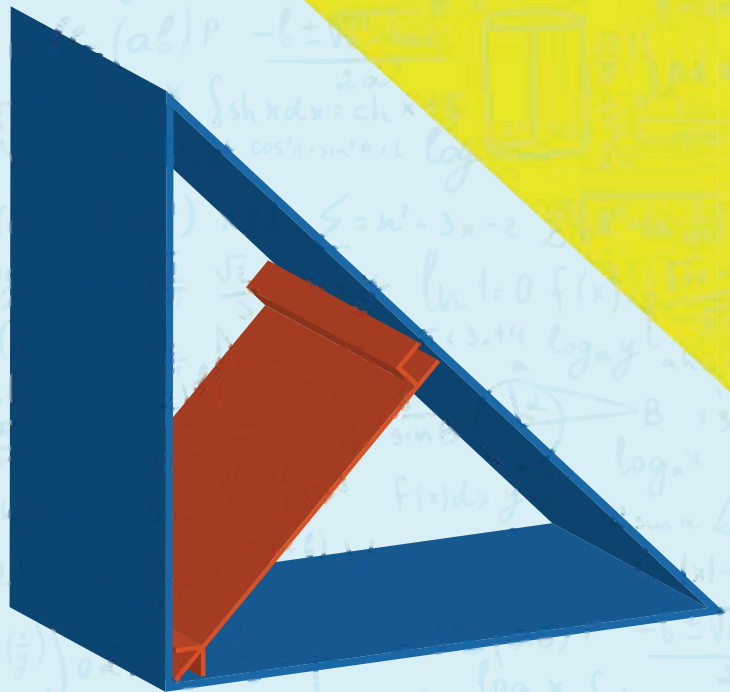
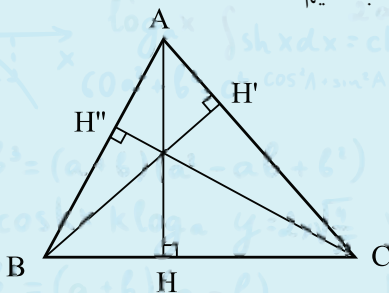


فرمول هرون؛ روش دیگری برای مساحت مثلث‌ها

عباس قلعه پور اقدم



نظیر رأس C (یعنی CH) را که بر ضلع AB عمود است را h_c در نظر می‌گیریم. همچنین قرارداد می‌کنیم که مساحت مثلث ABC را به صورت $S_{\triangle ABC}$ نمایش دهیم. در این صورت $S_{\triangle ABC}$ را می‌توانیم به سه روش زیر محاسبه کنیم:



شکل ۱

$$S_{\triangle ABC} = \frac{h_a \times a}{2} = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{h_c \times c}{2}$$

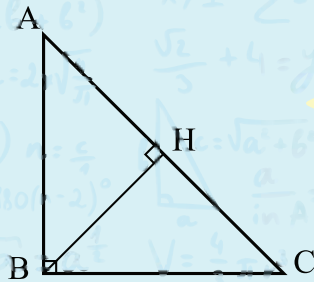
حالا از شما می‌خواهم که پرگار و خط‌کش آماده کنید تا با هم دست به یک کار عملی بزنیم. بخش اول این کار عملی، یادآوری رسم مثلثی است که اندازه‌های سه ضلع آن مشخص‌اند. و بخش دوم، رسم ارتفاع‌های مثلث و اندازه‌گیری طول آن‌ها و محاسبه مساحت مثلث است.

می‌خواهیم مثلث ABC را با مشخصات $AB=8\text{cm}$ ، $AC=7\text{cm}$ و $BC=6\text{cm}$ رسم کنیم. برای این کار ابتدا پاره خط AB را به طول ۸ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. سپس دهانه پرگار را یک بار به اندازه ۷ سانتی‌متر باز می‌کنیم و به مرکز نقطه A کمانی می‌زنیم. و بار دیگر کمانی به اندازه ۶ سانتی‌متر (به شعاع ۶ سانتی‌متر) به مرکز نقطه B رسم می‌کنیم. نقطه تقاطع این دو کمان را C می‌نامیم. با وصل کردن C به A و B، مثلث ABC ساخته می‌شود. حال به کمک گونیا، سه ارتفاع AH، BH' و CH'' را رسم می‌کنیم. شکل (۲) را ببینید.

شما عزیزان با مطالعه این بخش، با مساحت مثلث آشنایی بیشتری پیدا خواهید کرد و فرمولی را که به احتمال زیاد با آن آشنا نیستید، یاد خواهید گرفت. همان‌طور که می‌دانید، مساحت هر مستطیل را می‌توان بر حسب اندازه‌های ضلع‌های آن محاسبه کرد. در حالت کلی مساحت مستطیل با طول a و عرض b به صورت عبارت جبری ab است. مساحت مربع را نیز می‌توان با دانستن طول ضلع آن به دست آورد که عبارت جبری مربوط به مساحت مربعی با طول ضلع a به صورت a^2 است. در مورد مثلث، می‌دانید که سه تا ارتفاع دارد و ارتفاع پاره‌خطی است که از یک رأس مثلث بر ضلع روبه‌روی آن عمود می‌شود. همچنین می‌دانید که مساحت مثلث برابر نصف حاصل ضرب اندازه ارتفاع در اندازه قاعده نظیر آن است، این یعنی برای به دست آوردن مساحت مثلث باید اندازه یکی از ارتفاع‌های آن مشخص باشد. ولی آیا می‌توانید مساحت مثلث را تنها بر حسب اندازه‌های سه ضلع آن به دست آورید؟ یعنی با داشتن طول سه ضلع و معلوم نبودن اندازه هیچ‌یک از ارتفاع‌ها می‌توانید مساحت آن را حساب کنید؟ ابتدا اجازه دهید مساحت مثلث را به صورت یک عبارت جبری بر حسب اندازه‌های ارتفاع و قاعده نمایش دهیم. در مثلث ABC داریم: $AB=c$ ، $AC=b$ و $BC=a$ (شکل ۱). اندازه ارتفاع نظیر رأس A (یعنی AH) را که بر ضلع BC (قاعده نظیر آن) عمود است، h_a ، اندازه ارتفاع نظیر رأس B (یعنی BH) را که بر ضلع AC عمود است، h_b و اندازه ارتفاع

۲. مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع قائم است، البته نصف حاصل ضرب وتر در اندازه ارتفاع نظیرش نیز همان نتیجه را خواهد داشت (شکل ۴). در واقع برای محاسبه مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول سه ضلع آن یا حتی طول دو ضلع قائم آن مشخص است، به رسم روی کاغذ نیازی نیست و مقدار دقیق آن، با در نظر گرفتن یکی از ضلع‌های سازنده زاویه قائمه به عنوان ارتفاع و ضلع دیگر به عنوان قاعده، به دست می‌آید.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{BH \times AC}{2}$$



شکل ۴

روش رسم روی کاغذ برای محاسبه مساحت مثلثی که طول سه ضلع آن معلوم است، علاوه بر دقیق نبودن، ایراد دیگری نیز دارد: رسم مثلث‌هایی که طول ضلع‌های آن‌ها عددهای بزرگی هستند، امکان‌پذیر نیست. البته این ایراد راه‌حل دارد و آن رسم مثلث با مقیاس کوچک‌تر است که به موضوع تشابه مربوط می‌شود و کلاس نهمی‌ها در کتاب ریاضی خود با آن آشنا شده‌اند. حالا وقت آن رسیده است که فرمولی را برای محاسبه مساحت مثلث برحسب اندازه‌های سه ضلع آن معرفی کنیم تا با استفاده از آن بتوانید مساحت مثلث را به طور دقیق حساب کنید. آن فرمول، «فرمول هرون» است.

مثلث ABC را که طول ضلع‌های آن a، b و c هستند، در نظر می‌گیریم. همان‌طور که می‌دانید، محیط این مثلث برابر $a+b+c$ است. قرارداد می‌کنیم که محیط را با P نشان دهیم، پس: $P = a+b+c$. در این صورت فرمول هرون به شکل زیر است:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - a \right) \left(\frac{P}{2} - b \right) \left(\frac{P}{2} - c \right)}$$

حال بیایید مساحت همان مثلث ABC را که طول ضلع‌هایش ۶، ۷ و ۸ سانتی‌متر بود و با روش رسم مساحت آن را $20/4$ به دست آوردیم، با این فرمول محاسبه کنیم:

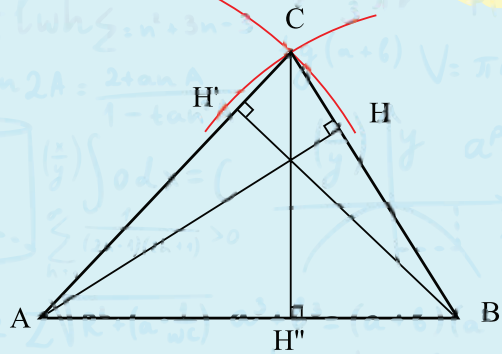
$$P = 8 + 7 + 6 = 21 \Rightarrow \frac{P}{2} = 10.5$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(10.5)(10.5-8)(10.5-7)(10.5-6)} \\ = \sqrt{413.4375} \approx 20.33$$

عدد $20/33$ مقدار دقیق مساحت مثلث ABC با دقت دو رقم اعشار است.

تمرین: مساحت مثلثی را که طول ضلع‌های آن ۱۰، ۹ و ۱۲۹ سانتی‌متر است، با فرمول هرون محاسبه کنید.

شکل ۲



خب! مثلث آماده است. حال می‌رسیم به موضوع اصلی که محاسبه مساحت آن است. به این منظور یکی از ارتفاع‌های مثلث، مثلاً AH را اندازه می‌گیریم. اندازه‌گیری من عدد $6/8$ سانتی‌متر یا 68 میلی‌متر را نشان می‌دهد.

تذکره ۱: ممکن است نتیجه اندازه‌گیری شما عددی متفاوت از $6/8$ باشد. این کاملاً طبیعی است. در واقع باید بگوییم، مقدار دقیق طول AH با مقدارهایی که با روش عملی رسم روی کاغذ توسط افراد متفاوت به دست می‌آیند، ممکن است اختلاف داشته باشد که این خطا به ابزار (خط‌کش، پرگار، گونیا یا حتی مدادی که با آن رسم انجام می‌شود) و میزان دقت شخص اندازه‌گیرنده مربوط است. پس هر قدر دقت خود را بیشتر کنید، محاسبه شما دقیق‌تر خواهد بود.

با این حساب، با در دست داشتن $BC = 6 \text{ cm}$ و $AH = 6/8 \text{ cm}$ برای مساحت مثلث می‌توان نوشت:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{6/8 \times 6}{2} = 20/4 \text{ سانتی‌متر مربع}$$

تذکره ۲: مقدار واقعی مساحت مثلث ABC به دلیل احتمال وجود خطا در اندازه‌گیری طول ارتفاع، با عددی که من به دست آورده‌ام یا شما به آن رسیده‌اید، ممکن است متفاوت باشد. در ادامه با فرمولی که یاد خواهید گرفت، مقدار دقیق مساحت این مثلث را با هم حساب خواهیم کرد. اینجا لازم است دو نکته یادآوری شود: ۱. اگر یکی از زاویه‌های مثلث باز (منفرجه) یعنی اندازه‌اش بیشتر از 90° درجه باشد، دو تا از ارتفاع‌ها بر امتداد ضلع‌های مثلث عمود می‌شوند. شکل ۳ را ببینید.

شکل ۳

